Pratique Supplémentaire 9 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 5.1, 5.2, 5.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

- A n'est pas diagonalisable. Ses valeurs propres sont : $-2, -2, 1$. La dimension de l'espace propre pour $\lambda = -2$ est seulement 1 alors que la multiplicité est 2.
- B est diagonalisable. En effet, les valeurs propres sont distinctes :
$$2, 1, \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right).$$
On voit facilement que $\vec{v}_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ et $\vec{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Les vecteurs propres pour $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right)$ et $\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right)$ sont
$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17+7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}) \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17-7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \end{pmatrix}.$$
Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ et $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ \vec{v}_4)$, on a $B = P\widetilde{D}P^{-1}$.
- C est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, -3, -3$.
Vecteurs propres associés : $\vec{v}_1 = (-16\ 4\ 0\ 1)^T$, $\vec{v}_2 = (-8\ 4\ 1\ 0)^T$, $\vec{v}_3 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$, $\vec{v}_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$.

Remarque : les vecteurs propres $(0\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 0\ 1)^T$ étaient faciles à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(5, 5, -3, -3)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3\ \overrightarrow{v}_4)$, on a $C = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— D est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, 4$.
Vecteurs propres associés : $\overrightarrow{v}_1 = (-2\ 0\ 1)^T$, $\overrightarrow{v}_2 = (0\ 1\ 0)^T$, $\overrightarrow{v}_3 = (-1\ 2\ 0)^T$.
Remarque : le vecteur propre $(0\ 1\ 0)^T$ était facile à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(5, 5, 4)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3)$, on a $D = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— E n'est pas diagonalisable. Valeurs propres : $0, 0$. La dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 0$ est seulement 1.

Exercice 2

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.
b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Sol.:

a) L'affirmation est vraie. Si A est diagonalisable, alors il existe P une matrice $n \times n$ inversible et D une matrice $n \times n$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, on a

$$P^{-1}A^kP = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP = DD \dots D = D^k,$$

et comme D^k est diagonale, A^k est bien diagonalisable.

b) L'affirmation est fausse. En effet, on considère la matrice A avec des zéros partout sauf un 1 en haut à droite (ligne 1, colonne n). Cette matrice A n'est pas diagonalisable, et pourtant A^k est nulle donc diagonalisable.

Exercice 3

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A = PDP^{-1}$; ensuite, utiliser cette expression pour donner une expression simple pour A^k, pour un entier positif k quelconque. ***Sol.:*** On vérifie en effet que

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

La factorisation $A = PDP^{-1}$ permet de calculer facilement les puissances successives de A. En effet,

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2}DP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Par induction, on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Remarquons que puisque D est diagonale, sa n-ème puissance est donnée par

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} .$$

Ceci permet donc de calculer

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

qui se simplifie pour donner

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-3^n}{4} \\ (-1)^n - 3^n & \frac{3^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Calculer les vecteurs propres de A.
3. Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
4. Calculer A^{1000}.

Sol.: 1) Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 5) .$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

2) On cherche d'abord le(s) vecteur(s) propre(s) associé(s) à λ_1, c'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{v}$ satisfaisant $A\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}$, en résolvant

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

(On *sait* que ce système doit posséder une infinité de solutions !) On trouve que tous les vecteurs propres sont colinéaires à

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On trouve de même que tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont colinéaires à

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

3) Si

$$P = (\overrightarrow{v}_1 \ \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

on calcule :

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \equiv D\,,$$

qui n'est autre que la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. On a donc *diagonalisé* la matrice A.

4) Comme vu en classe, la diagonalisation permet de calculer les grandes puissances de A de manière directe. Comme $P^{-1}AP = D$, on a $A = PDP^{-1}$, et

$$\begin{aligned} A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{pmatrix}(-\tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}5^{1000} & -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}5^{1000} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}5^{1000} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}5^{1000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 5

Conseil : pour calculer $\frac{1}{z}$ où z est complexe, démarrez avec $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}}$.

a) Calculer $\bar{i}$, $\overline{i^2}$, $(\bar{i})^2$, $\frac{1}{i}$ (aussi noté i^{-1}).
b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Décrire géométriquement le produit iz.
c) Soit $w = 1 + i$ et $z = 2 + 3i$. Calculer w/z (à mettre sous la forme $a + bi$).

Sol.:

a) On a $\bar{i} = -i$, $\overline{i^2} = \overline{-1} = -1$, $(\bar{i})^2 = (-i)^2 = -1$, et $\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$.
b)
$$\frac{w}{z} = \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$
c) Si $z = a + bi$, alors $iz = -b + ai$. Géométriquement la transformation $(a,b) \to (-b,a)$ correspond à une rotation autour de l'origine ($0 \in \mathbb{C}$) et d'angle $\pi/2$.

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres. ☐ ☐
b) Pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes. ☐ ☐
c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes. ☐ ☐
d) Soient A, B et C trois matrices de même taille. Si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C. ☐ ☐

Sol.: Vrai : a), d). Faux : b), c).

a) Supposons que A et B soient semblables (de taille $n \times n$) et montrons qu'elles ont les mêmes valeurs propres. L'hypothèse que A est semblable à B signifie qu'il existe une matrice inversible S de taille $n \times n$ telle que $B = S^{-1}AS$. Calculons $p_B(t)$ le polynôme caractéristique de B et montrons qu'il est égal à celui de A : On a que $p_B(t) = \det(B - tI_n) = \det(S^{-1}AS - tI_n) = \det(S^{-1}AS - S^{-1}tI_nS) = \det(S^{-1}(A - tI_n)S)$. En utilisant le fait que $\det(CD) = \det(C)\det(D)$ (pour des matrices carrées de même taille C, D), on trouve :

$$p_B(t) = \det(S^{-1}(A - tI_n)S) = \det(S^{-1})\det(A - tI_n)\det(S)$$

$$= \det(S)^{-1}\det(S)\det(A - tI_n) = p_A(t).$$

Les matrices A et B ont donc les mêmes polynômes caractéristiques ce qui implique qu'elles ont même ensemble de valeurs propres (qui sont les racines de leur polynôme caractéristique).

b) Faux. La matrice identité est diagonal(isabl)e mais elle ne possède qu'une seule valeur propre : 1.

c) Faux. Prenons $A = I_n$ la matrice identité de taille $n \times n$. Alors tout vecteur non-nul est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

d) Vrai. Si A est semblable à B et B est semblable à C cela signifie qu'il existe deux matrices inversibles S, T telles que $B = S^{-1}AS$ et $C = T^{-1}BT$. Donc $C = T^{-1}S^{-1}AST = (ST)^{-1}A(ST)$ ce qui signifie que A est semblable à C.